



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2021

الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = -\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{11u_n + 4}{-4u_n + 1}$

(1) أ . تَحَقِّقْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي n : $u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n + 1)}$

ب. برهن بالتراجع أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي n : $-2 < u_n < -1$

ج. بَيِّنْ أَنَّ الْمَتتَالِيَةَ (u_n) مَتتَاقِصَةٌ تَمَامًا ثُمَّ اسْتنتج أَنَّهَا مَتتَاقِرَةٌ.

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ . بَيِّنْ أَنَّ الْمَتتَالِيَةَ (v_n) هِنْدَسِيَّةٌ أُسَاسُهَا 3 ثُمَّ احسب حدَّها الأول.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثُمَّ اسْتنتج أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي n : $u_n = \frac{3}{2 + 4 \times 3^n} - 2$

ج. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) أ . تَحَقِّقْ أَنَّهُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عِدَدٍ طَبِيعِي n : $\frac{3}{u_n + 2} - 2 = -v_n$

ب. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \ln\left(\frac{3}{u_0 + 2} - 2\right) + \ln\left(\frac{3}{u_1 + 2} - 2\right) + \dots + \ln\left(\frac{3}{u_n + 2} - 2\right)$

احسب S_n بدلالة n

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 12 كرتية متماثلة لا نفرق بينها باللمس.

كل من الكرتيات الاثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية: 1 ، 2 ، 3 ، 4

نسحب عشوائيا كرتية واحدة من الكيس.

نرمز بـ: p_i إلى احتمال سحب كرتية رقما i ، حيث: $p_1 = \frac{1}{3}$ ، $p_2 = \frac{1}{6}$ ، $p_3 = \frac{1}{4}$ و $p_4 = \frac{1}{4}$

(1) وِزَعِ الْكِرْتِيَّاتِ الْاِثْنَتِي عَشْرَةَ حَسَبِ الْأَرْقَامِ 1 ، 2 ، 3 ، 4

(2) احسب احتمال كل من الحوادث A ، B و C الآتية:

" سحب كرتية تحمل رقما فرديا "

" سحب كرتية تحمل رقما من أرقام نظام التعداد ذي الأساس 4 "

" سحب كرتية رقما حل للمعادلة: $x^2 = 2^x$ "

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب لكريّة الرّقم الذي تحمله.
عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $(E) : 42x - y = 38 \dots$ حيث x و y عدنان صحيحان.
حلّ المعادلة (E) علما أنّ الثنائيات $(1; 4)$ حلّ لها.

(2) a ، b و c أعداد طبيعية حيث a غير معدوم.
العدد الطبيعي N يكتب $ab0cb$ في نظام تعداد أساسه 5 و يكتب $a7c5$ في نظام تعداد أساسه 8
أ. بيّن أنّ الأعداد a ، b و c تُحقّق: $113a = 3(c - 42b + 151)$ ثم استنتج أنّ: $a = 3$

ب. جدّ العددين الطبيعيين b و c ثم اكتب العدد N في النظام العشري.
(3) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 6
ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $2021^{2n} + 1441^n + 4$ مضاعف للعدد 6

ج. نضع: $A_n = 2021^{2n} + 1441^n + 2 \times 1442^n$

جدّ قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[6]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية g معرفة على \mathbb{R} ب: $g(x) = (x^2 - 3)e^x + 3$

(1) ادرس تغيّرات الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(2) أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1,53 < \alpha < 1,54$

ب. احسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

(II) الدالة العددية f معرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0; \alpha]$

ج. شكّل جدول تغيّرات الدالة f

(3) أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$

ب. ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

ج. بيّن أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقّق: $2,03 < \beta < 2,04$

د. بيّن أنّ (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لـ (Δ) (لا يُطلب كتابة معادلة لـ (T) و (T'))

(4) ارسم (Δ) ، (T) ، و (T') على $]1 + \sqrt{2}; -\infty]$

(نأخذ: $\alpha \approx 1,53$ ، $f(\alpha) \approx -2,3$ ، $f(\sqrt{3}) \approx -2,1$ و $f(-\sqrt{3}) \approx -3,2$)

(5) الدالة العددية h معرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $h(x) = f[\ln(x)]$

أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

ب. ادرس اتجاه تغيّر الدالة h ثم شكّل جدول تغيّراتها.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}u_n^2}$

(1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

ب. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) المتتالية العددية (v_n) معرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n^2 - 4$

أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب حساب حدّها الأول.

ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \sqrt{4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

ج. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{n \times 2^{n+2} + 3}{2^n} - 2$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}) = PGCD(2^n; 3)$

ج. استنتج أن: $PGCD(2^n; 3 + n \times 2^{n+2}) = 1$

د. جد قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $S_n = \frac{83}{8}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يُراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال H_1, H_2, H_3 و أربع نساء F_1, F_2, F_3, F_4

(1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو 42

(2) نعتبر الحوادث الآتية: "A" اللجنة من نفس الجنس "B" اللجنة من جنسين مختلفين

"C" H_1 هو الرئيس "E" اللجنة لا تضم كلا من H_1 و F_1

أ. احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$

ب. احسب $P(C)$ و $P(E)$

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.

عين قانون احتمال X ثم احسب $E(X)$ أمله الرياضي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $(E) 7x - 6y = 1 \dots$ حيث x و y عدنان صحيحان.

أ. حل المعادلة (E) علما أن الثنائية $(1; 1)$ حل لها.

ب. تحقّق أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن xy عدد طبيعي غير معدوم.

(2) أ. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7

ب. بين أن العدد $4 \times 2019^{2021} + 2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7

- (3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $4^n \equiv 4 \pmod{6}$
- (4) نرض أن الثنائية $(a; b)$ حل للمعادلة (E)
 A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 4 على الشكل: $333\dots330$ (عدد أرقامه $a \times b$)
 أ . بيّن أن: $A = 4^{ab} - 4$
 ب. تحقّق أن: $A \equiv 0 \pmod{6}$ ثم عيّن كل الثنائيات $(a; b)$ التي من أجلها يكون A قابلا للقسمة على 42

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.
 في الشكل المقابل (C) و (Γ) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان
 للذالتين العدديتين المعرفتين على المجال $]-1; +\infty[$ ب:
 $x \mapsto 1+x^2$ و $x \mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$
 (C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقّق: $0,78 < \alpha < 0,79$
 (Γ) الدالة العددية g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب:

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$$

- (1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x من المجال $]-1; +\infty[$ وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ)
 (2) استنتج حسب قيم x من المجال $]-1; +\infty[$ إشارة $g(x)$

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة: 2 cm)

(1) أ . احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و بيّن أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

ب. فسّر النهايتين هندسياً.

(2) أ . بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$:
 $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ج. بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ثم استنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$

د. اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O

(3) ارسم (T) و (C_f) (نأخذ: $f(\alpha) \approx 0,36$)

(4) الدالة العددية h معرفة على \mathbb{R} ب: $h(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أن الدالة h زوجية.

ب. بيّن أن الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم فسّر ذلك بيانياً.

ج. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسمه.