الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2022
الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ‒عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب‒ بيّن أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $6^{2n} \equiv 1[7]$ ثمّ استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 6^n على 7

2) بيّن أنّ العدد $\left(2021^{2022}+1962^{1443}\right)^{1954}-2$ يقبل القسمة على 7

3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $a_n = 2^n + 6^n$ و $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

أ‒ اِستنتج، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد a_n على 7

ب‒ بيّن أنّه، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_{n+6} \equiv S_n[7]$

جـ‒ أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $S_n \equiv 2^{n+1} + 3\times 6^{n+1} + 3[7]$ ثمّ استنتج قيم n بحيث $S_n \equiv 0[7]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل في كلّ حالة من الحالات التالية:

1) α و β عددان حقيقيان غير معدومين. (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان بـ :

$u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $5u_{n+1} = u_n + \alpha$ و $v_n = u_n + \beta$

‒ المتتالية (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $\alpha = -4\beta$

2) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \ln\sqrt{e^{n.\ln 2}}$ هي متتالية حسابية أساسها $\ln\sqrt{2}$

3) x عدد صحيح . إذا كان $x \equiv 3[7]$ و $x \equiv 1[3]$ فإنّ $x \equiv 3[21]$

4) الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ دالة فردية.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

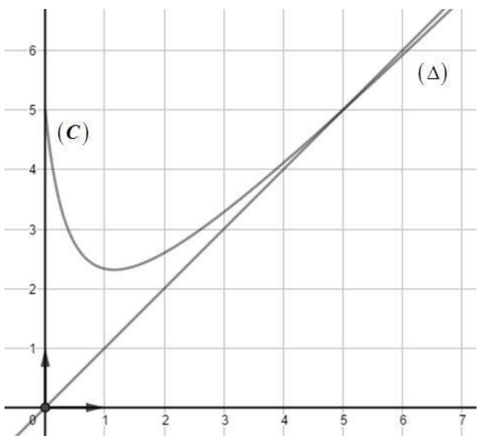
f الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{2x^2+5}{2x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبيّن في الشّكل المرفق.

(u_n) المتتالية العدديّة المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1) أ– أُدرس وضعية (C) بالنّسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

ب– انقل الشّكل ومثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 وضع تخميناً حول اتّجاه تغيّر (u_n)

2) أ– برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $2 \le u_n < 5$



ب– أُدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n،

$$5-u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}(5-u_n)$$

4) أ– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $\frac{2u_n}{2u_n+1} \le \frac{10}{11}$

ب– اِستنتج أنّ $0<5-u_n \le 3\left(\frac{10}{11}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $]-\infty;1[$ كما يلي: $f(x)=\frac{e^x-x^2}{x-1}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O,\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1) أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$

2) أ– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x، $e^x-x>0$

ب– بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]-\infty;1[$ ، $f'(x)=\frac{(x-2)(e^x-x)}{(x-1)^2}$

جـ– اِستنتج اتّجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ– أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$ ثمّ فسّر النّتيجة بيانيا.

ب– أُدرس وضعية (C) بالنّسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-x-1$

4) أُكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (C) في النّقطة ذات الفاصلة 0

5) أ– بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ وحيداً α حيث $-0{,}8<\alpha<-0{,}7$

ب– أنشئ (T) ، (Δ) و (C)

6) ناقش بيانياً، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{e^x-x^2+x-1}{x-1}=mx$

7) g الدّالة المعرّفة على $]-\infty\,;\,1[$ بـ : $g(x)=\frac{\left|e^x-x^2\right|}{x-1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

– أُكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثمّ أنشئ (C_g)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

n عدد طبيعي. نضع: $A_n = n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ و $B_n = n + 2$

1) أ- بيّن أنّ $p\gcd(A_n ; B_n) = p\gcd(B_n ; 7)$

ب- اِستنتج القيم الممكنة لِ $p\gcd(A_n ; B_n)$

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A_n و B_n أوليين فيما بينهما.

2) نعتبر المعادلة $A_2 x - B_2 y = 29 \cdots\cdots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ- بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 3[4]$

ب- عيّن حلول المعادلة (E)

3) أ- اِستنتج حلول المعادلة $51x - 4y = 45 \cdots\cdots (E')$

ب- عيّن الثنائيات $(x ; y)$ حلول المعادلة (E') حيث $|y - 12x| \leq 3$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة والموجبة على $]-1 ; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{ax}{x+b} + \ln(x+b)$

حيث a و b عددان حقيقيان مع b موجب تماما. تمثيلها البياني (C) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ يقبل حامل محور الفواصل مماسا له في النقطة O

1) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ، $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x+1} + \ln(x+1)$

2) g الدالة العددية المعرّفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$

أُحسب $g'(x)$ ثمّ اِستنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1 ; +\infty[$

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$

أ- أُحسب u_{2022} ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ب- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n = -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln n$

جـ- أُحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}u_n^2 + \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3}$ و $v_n = u_n - 1$

1) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}(v_n)^2$

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $-3 \leq v_n < 0$

3) أُدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثمّ استنتج أنّ (v_n) متقاربة.

4) (w_n) المتتالية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $w_n = \ln\left(-\dfrac{3}{v_n}\right)$

أ- بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدّها الأول w_0

ب- أُكتب w_n بدلالة n، ثمّ استنتج v_n و u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) أحسب بدلالة n الجُداء P_n حيث $P_n = \dfrac{1}{v_0}\times\dfrac{1}{v_1}\times\dots\times\dfrac{1}{v_n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) h الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = x + \ln x$

1) أُدرس اتّجاه تغيّر الدّالة h

2) أ- بيّن أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

ب- إستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$

II) f الدالة العدديّة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - x\ln x + (\ln x)^2$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i}\,,\ \vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما ، $f'(x) = \dfrac{(2-x)h(x)}{x}$

ب- استنتج اتّجاه تغيّر الدّالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) بيّن أنّ $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha(\alpha+2)$ ثمّ عيّن حصراً لِ $f(\alpha)$

4) g الدّالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

أ- أُدرس اتّجاه تغيّر الدّالة g واحسب $g(1)$

ب- بيّن أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها.

جـ- أُكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (C) في النّقطة A

5) أنشئ (T) و (C) في المجال $]0;5]$

6) k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $k(x) = f(e^{-x})$

أ- دون حساب عبارة $k(x)$، ادرس اتجاه تغيّر الدالة k ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة k

انتهى الموضوع الثاني