# Baccalauréat blanc n°3

*Les calculatrices sont autorisées . Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.*

| | |
|---|---|
| Exercice 1 : | /5 |
| Exercice 2 : | /4 |
| Exercice 3 : | /6 |
| Exercice 4 : | /5 |
| Spécialité : | /5 |
| Total : | /20 |

**Le sujet est à rendre avec la copie.**
**Durée : 4h**

**Les élèves qui ne suivent pas la spécialité "maths" doivent traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.**
**Les élèves qui suivent la spécialité "maths" doivent traiter les exercices 1, 2, 3 et 5.**

**L'exercice de spécialité doit être traité sur une copie séparée.**

---

**Exercice 1.** *( 5 points)* **Commun à tous les candidats**
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$.
   (a) Écrire $z_{\mathrm{A}}$ et $z_{\mathrm{B}}$ sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   (b) Faire une figure et placer les points A et B.
   (c) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.
3. On note F le point d'affixe $z_{\mathrm{F}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}$.
   (a) Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ puis de l'angle $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$.
   (c) Calculer le module de $z_{\mathrm{F}}$ et en déduire l'écriture de $z_{\mathrm{F}}$ sous forme trigonométrique.
   (d) En déduire la valeur exacte de :
   $$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$
4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :
   $$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$
   et pour l'autre :
   $$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$
   Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

**Exercice 2.** *( 4 points)* **Commun à tous les candidats**
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à $10^{-4}$ près.

## Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les événements :
$M$ : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
$C$ : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. (a) Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
   (b) Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.
   (c) Calculer $P(C)$.
2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

## Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de $n$ personnes, prises au hasard dans la population française.
On note $X$ la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire $X$. Justifier.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 400$.
   (a) Déterminer $P(X = 35)$. Interpréter le résultat.
   (b) Déterminer $P(30 \leqslant X \leqslant 50)$. Interpréter le résultat.
   (c) Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer le nombre minimal de personnes à interroger dans la population française pour que la probabilité d'en avoir au moins une d'entre elle atteinte de la malformation soit supérieure à 0,99.

**Exercice 3.** *( 6 points)*
**Commun à tous les candidats**
On considère les fonctions $f$ et $g$ définies pour tout réel $x$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

**Partie A**

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

**Partie B**

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $a$ et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse $b$.

1. (a) Exprimer en fonction de $a$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
   (b) Exprimer en fonction de $b$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
   (c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel $a$ est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1 = 0.$$

**Partie C**

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction $\varphi$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée de la fonction $\varphi$, puis étudier son signe.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   (b) On note $\alpha$ la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et $\beta$ la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ arrondies au centième.

**Partie D**

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\alpha$ et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ ($\alpha$ est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

**Exercice 4.** *( 5 points)*
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**
On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. (a) Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4$. On pourra en donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près.
   (b) Vérifier que si $n$ est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   (c) Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
   (b) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
   (c) On admet que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 5.** *( 5 points)*

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Cet exercice doit être rédigé sur une copie séparée**

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.
Pour tout entier naturel $n$, on note $j_n$ le nombre d'animaux jeunes après $n$ années d'observation et $a_n$ le nombre d'animaux adultes après $n$ années d'observation.
Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.
Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.
On admet que pour tout entier naturel $n$ on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} j_{n+1} & = & 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ a_{n+1} & = & 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{array}\right.$$

On introduit les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel $n, U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = A \times U_n$.
   (b) Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).
   (c) Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $U_n$ en fonction de $A^n$ et de $U_0$.
2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ ; $D = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,06 \\ 0,1 & 0,14 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $Q \times D \times P = A$.
   (b) Que peut-on dire des produits $P \times Q$ et $Q \times P$ ?
   (c) Montrer par récurrence sur $n$ que pour tout entier naturel $n$ non nul : $A^n = Q \times D^n \times P$.
   (d) Pour tout entier naturel $n$ non nul, déterminer $D^n$ en fonction de $n$.
3. On admet que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 + 0,3 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$$

   (a) En déduire les expressions de $j_n$ et $a_n$ en fonction de $n$ et déterminer les limites de ces deux suites.
   (b) Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

**Annexe**

**à rendre avec la copie**

**Exercice 3**