Baccalauréat blanc n°3

Exercice 1. *(5 points)* **Commun à tous les candidats**

1. $\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4\right)=0 \iff \left[\begin{array}{lcl} z^2-2z+4 & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ z^2+4 & = & 0 \end{array}\right.$.
   - $z^2-2z+4=0 \iff (z-1)^2-1+4=0 \iff (z-1)^2=-3 \iff (z-1)^2=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.

   Cette équation a deux solutions $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   - $z^2+4=0 \iff z^2=(2\mathrm{i})^2$: cette équation a deux solutions : $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$.

   Conclusion : l'équation a quatre solutions :
   $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $2\mathrm{i}$; $-2\mathrm{i}$.
2. (a) • $\left|z_{\mathrm{A}}\right|^2=1+3=4=2^2 \Rightarrow \left|z_{\mathrm{A}}\right|=2$.

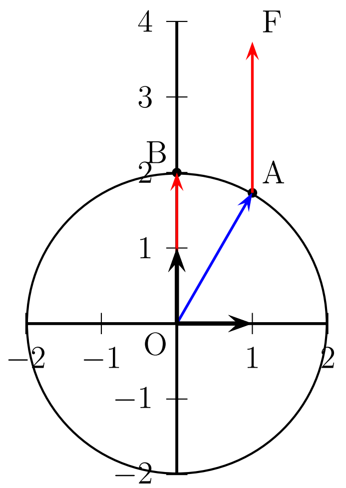
   On peut écrire $z_{\mathrm{A}}=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ soit en écriture exponentielle

   $z_{\mathrm{A}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   • $z_{\mathrm{B}}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

   On a donc avec les modules OA = OB = 2 : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

   (b)



   (c) On a $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   Or $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\arg\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}=\dfrac{\pi}{6}$.
3. (a) F se construit par la méthode du parallélogramme ; or on a vu que OA = OB : le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

   (b) OAFB est un parallélogramme et OA = OB = 1, donc deux de ses côtés consécutifs ont même longueur : OAFB est donc un losange et par conséquent la droite (OF) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$; donc une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{12}$.

   $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)=\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}$ qui est un argument de z_{F}.

(c) On a $z_{\mathrm{F}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + 2\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} + 2\right)$.
Donc $|z_{\mathrm{F}}|^2 = 1^2 + \left(\sqrt{3} + 2\right)^2 = 1 + 3 + 4 + 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} = 4\left(2 + \sqrt{3}\right)$.
Donc $|z_{\mathrm{F}}| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
On a vu qu'un argument de z_{F} est $\dfrac{5\pi}{12}$, donc l'écriture trigonométrique de z_{F} est :
$z_{\mathrm{F}} = 2\sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

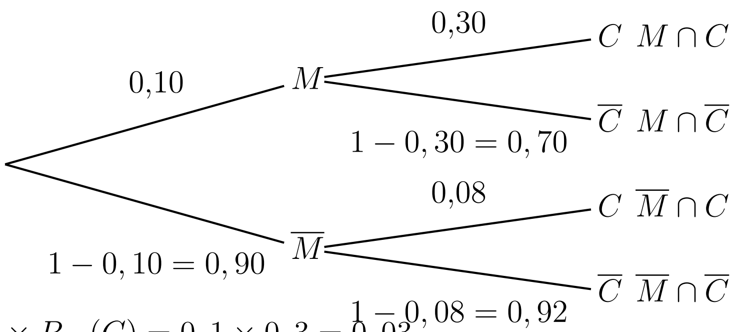
(d) On a vu que la partie réelle de z_{F} est égale à 1 et d'après la question précédente elle est aussi égale à $2\sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12}$.
Donc en égalant :
$1 = 2\sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)}\cos\dfrac{5\pi}{12} \iff \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 \times (4 - 3)} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

4. Ces deux nombres sont positifs ($\sqrt{6} > \sqrt{2}$) ; comparons leurs carrés :
- $\left[\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right]^2 = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$;
- $\left[\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right]^2 = \dfrac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{4\left(2 - \sqrt{3}\right)}{16} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux ; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

Exercice 2. *(4 points)* **Commun à tous les candidats Partie A**

1. (a) En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



(b) $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

(c) D'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right) \\ &= P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) = 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102 \end{aligned}$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.
La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:
$P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de n personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de n personnes dans la population totale.
Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après le texte.
Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,1$.

2. $n = 400$.

(a) Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;0,1)$, $P(X = 35) = \dbinom{400}{35} 0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}$;
le résultat donné par la calculatrice est approximativement 0,049 1.
La probabilité que 35 personnes de ce groupe présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est d'environ 0,049 1.

(b) $P(30 \leqslant X \leqslant 50) = P(X \leqslant 50) - P(X \leqslant 29) \approx 0{,}920\,7$.
La probabilité qu'entre 30 et 50 personnes de ce groupe présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est d'environ 0,920 7.

(c) $E(X) = n \times p = 400 \times 0,1 = 40$. En moyenne, 40 personnes dans les groupes de 400 présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

3. $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,9^n \geqslant 0,99$
Or, pour $n = 43$, $1 - 0,9^{43} \approx 0,9892$ et pour $n = 44$, $1 - 0,9^{44} \approx 0,9903$.
Il faut donc, au minimum, interroger 44 personnes.

Exercice 3. *(6 points)* **Commun à tous les candidats**
Partie A

Voir la figure.

Partie B

1. (a) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f'(a) = \mathrm{e}^a$.

(b) De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$, donc $g'(b) = \mathrm{e}^{-b}$.

(c) Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :
$f'(a) = g'(b) \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :
$a = -b \iff b = -a$.

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égale à :
$y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x - a) \iff y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1 - a)$.
Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égale à :
$y - \left(1 - \mathrm{e}^{-b}\right) = \mathrm{e}^{-b}(x - b) \iff y = x\mathrm{e}^{-b} + 1 - \mathrm{e}^{-b} - b\mathrm{e}^{-b}$.
Ou en remplaçant $-b$ par a :
$y = x\mathrm{e}^a + 1 - \mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a \iff y = x\mathrm{e}^a + 1 + \mathrm{e}^a(a - 1)$.
Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :
$\mathrm{e}^a(1 - a) = 1 + \mathrm{e}^a(a - 1) \iff \mathrm{e}^a(2 - 2a) = 1 \iff 2(a - 1)\mathrm{e}^a + 1 = 0$.
Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2(x - 1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

1. (a) Sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 1$.
On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, d'où par somme de limite :
$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1$.
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ.
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

(b) Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\varphi'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2(x-1)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x$.
Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x. Donc sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $\varphi'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0\ ;\ +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

(c)

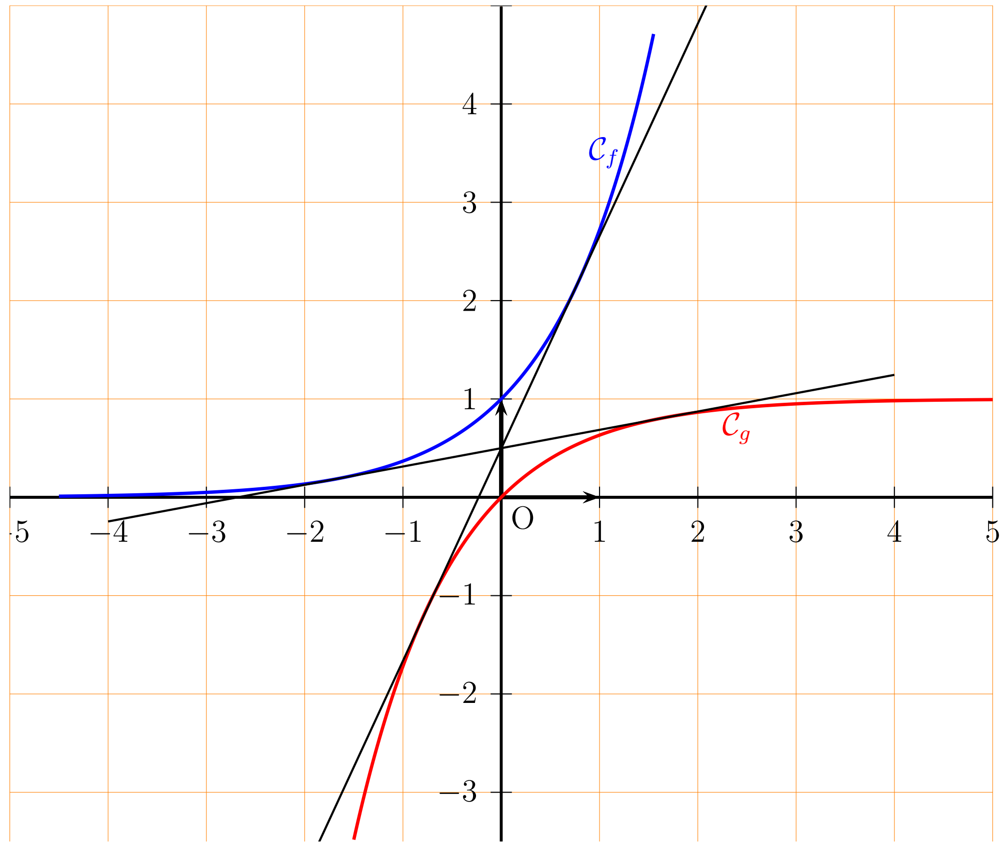
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Sur $]-\infty\ ;\ 0]$ la fonction φ est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[-1\ ;\ 1]$. Comme $0 \in [-1\ ;\ 1]$ il existe un réel unique α de $]-\infty\ ;\ 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Le même raisonnement sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $f(\beta) = 0$.
Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

(b) La calculatrice donne successivement :
$\varphi(-2) \approx 0,18$ et $\varphi(-1) \approx -0,47$, donc $-2 < \alpha < -1$;
$\varphi(-1,7) \approx 0,013$ et $\varphi(-1,6) \approx -0,05$, donc $-1,7 < \alpha < -1,6$;
$\varphi(-1,68) \approx 0,001$ et $\varphi(-1,67) \approx -0,005$, donc $-1,68 < \alpha < -1,67$;
$\varphi(-1,679) \approx 0,00041$ et $\varphi(-1,678) \approx -0,0002$, donc $-1,679 < \alpha < -1,678$.
Conclusion au centième près $\alpha \approx -1,68$.
De la même façon on obtient $\beta \approx 0,77$.

Partie D

1. Le coefficient directeur de la tangente en E à $\mathcal{C}_f$ est e^α.
Le coefficient directeur de la droite (EF) est : $\dfrac{1-\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^\alpha}{-\alpha-\alpha} = \dfrac{1-2\mathrm{e}^\alpha}{-2\alpha}$.
Or α est solution de l'équation : $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$, autrement dit $2(\alpha-1)\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff 2\alpha\mathrm{e}^\alpha = 2\mathrm{e}^\alpha - 1$, d'où en revenant au coefficient directeur de la droite (EF) : $\dfrac{1-2\mathrm{e}^\alpha}{-2\alpha} = \dfrac{-2\alpha\mathrm{e}^\alpha}{-2\alpha} = \mathrm{e}^\alpha$
Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $\mathrm{e}^{-(-\alpha)} = \mathrm{e}^\alpha$.
On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^α et contient le point F.
Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.


$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_g$
O
-5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−1
−2
−3

Exercice 4. *(5 points)*
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) $u_1 = \frac{4}{5} = 0,8$; $u_2 = \frac{14}{13} \simeq 1,08$; $u_3 = \frac{40}{41} \simeq 0,98$; $u_4 = \frac{122}{121} \simeq 1,01$.

   (b) On voit bien que $u_0 > 1$; $u_1 < 1$; $u_2 > 1$; $u_3 < 1$; $u_4 > 1$ donc le signe des différences $(u_n - 1)$ change à chaque rang :
   si n pair c'est $+$
   si n impair c'est $-$, comme $(-1)^n$.

   (c) $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

   (d) On a admis au début de l'énoncé que tous les u_n sont strictement positifs (on pourrait le démontrer par récurrence) ; démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$: $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$:
   L'*initialisation* est faite au b : $(u_0 - 1 > 0)$.
   Hérédité : supposons que pour n entier naturel $(u_n - 1)$ ait le signe de $(-1)^n$; alors $(1 - u_n)$ a le signe opposé de $(u_n - 1)$ donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$ et
   $(2u_n + 1) > 0$, vu que tous les u_n sont strictement positifs, donc la fraction $\dfrac{1 - u_n}{2u_n + 1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ et comme elle est égale à $(u_{n+1} - 1)$, on a prouvé que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, l'hérédité est prouvée.
   CONCLUSION : On a montré que $u_0 - 1 > 0$ et si pour n de $\mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le signe de $(-1)^n$ entraîne que $(u_{n+1} - 1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, donc d'après le principe de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n - 1)$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

   (a) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} = \dfrac{\frac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}} = \dfrac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{u_n + 2 + 2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

   (b) $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = \dfrac{-1}{3}\dfrac{(u_n - 1)}{u_n + 1} = \dfrac{-1}{3}v_n$.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$.
   $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{3}$ donc $v_n = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   (c) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n}$.
   Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{-1}{3}$, donc $-1 < q < 1$, (v_n) tend vers 0, donc (u_n) converge vers 1.

Exercice 5. *(5 points)*
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) On a $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,125j_n + 0,525a_n \\ 0,625j_n + 0,625a_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

   (b) un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut). $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 + 262,5 \\ 125 + 312,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$.
   Au bout de 1 an il y aura 287 jeunes et 437 adultes.
   $U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35,9375 + 229,688 \\ 179,688 + 273,438 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265,625 \\ 453,125 \end{pmatrix}$.
   Au bout de 2 ans il y aura 265 jeunes et 453 adultes.

   (c) Une récurrence simple permet de montrer que quel que soit le naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

2. (a) $Q \times D = \begin{pmatrix} -1.75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix}$, puis
   $(Q \times D) \times P = \begin{pmatrix} -0,175 + 0,3 & 0,105 + 0,42 \\ 0,125 + 0,5 & -0,075 + 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} = A$.

   (b) $P \times Q = Q \times P = I_2$

   (c) $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$?
   Initialisation : On a bien $A^1 = Q \times D^1 \times P$ (question 2.(a)).
   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $p > 0$ tel que : $A^p = Q \times D^p \times P$.
   Alors $A^{p+1} = A^p \times A = (Q \times D^p \times P) \times (Q \times D \times P) = Q \times D^p \times (P \times Q) \times D \times P$
   $= Q \times D^p \times I \times D \times P = Q \times (D^p \times D) \times P = Q \times D^{p+1} \times P$.
   La formule est donc vraie au rang $p + 1$.
   conclusion : La formule est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, donc, par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul :
   $A^n = Q \times D^n \times P$.

   (d) La matrice D est diagonale, donc :
   $D^n = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Quel que soit le naturel n :
   $U_n = A^n \times U_0$
   $= \begin{pmatrix} 0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n & 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \\ 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n & 0,7 \;+0,3 \;\times (-0,25)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 60 + 140 \times (-0,25)^n + 210 - 210 \times (-0,25)^n \\ 100 + -100 \times (-0,25)^n + 350 + 150 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$.
   Conclusion $\begin{cases} j_n = 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ a_n = 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{cases}$

   (b) Comme $-1 < -0,25 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,25)^n = 0$, donc :
   $\lim\limits_{n \to +\infty} j_n = 270$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 450$.
   Le nombre d'animaux jeunes va tendre vers 270 et celui des adultes vers 450 au bout de quelques années.