Baccalauréat blanc n°2

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 3h - pas de sortie anticipée

Exercice 1 :	/6
Exercice 2 :	/4
Exercice 3 :	/4
Exercice 4 :	/6
Total :	/20

Exercice 1. *(6 points)*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (Les limites ne sont pas attendues.)
2. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x,
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $[-1; 0]$.
   (b) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
   (c) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

Exercice 2. *(4 points)*
Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; -0,5] \cup [2,5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 - 8x + 5}$.
   Que vaut $f'(x)$?

   (a) $f'(x) = \sqrt{8x - 8}$;

   (b) $f'(x) = \dfrac{8x - 8}{\sqrt{4x^2 - 8x + 5}}$;

   (c) $f'(x) = \dfrac{4x - 4}{\sqrt{4x^2 - 8x + 5}}$;

   (d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2 - 8x + 5}}$.

2. L'équation $e^{2x+1} \times e^{x^2} = 0$

   (a) n'admet aucune solution ;

   (b) est équivalente à $x^2 + 2x + 1 = 0$;

   (c) a pour solution 0 ;

   (d) est équivalente à $x^2 + 2x + 1 = 1$.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $g(x) = e^{\frac{4x-1}{2x+4}}$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g.

   (a) $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation $y = 7,4$;

   (b) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = 0$;

   (c) $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation $y = -2$;

   (d) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = 0$.

4. On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. On admet que cette fonction s'annule sur l'intervalle $[-2; 2]$. On cherche à déterminer un encadrement à 10^{-3} de la racine de cette fonction. On suppose la fonction h déjà définie sur le logiciel de programmation. Il faut considérer l'algorithme :

(a)

```
a ← −2
b ← 2
Tant que b − a < 10^−3 faire
    m ← (a + b)/2
    si h(a) × h(m) > 0 alors
        b ← m
    sinon
        a ← m
    finSi
finTantQue
Afficher a, b
```

(b)

```
a ← −2
b ← 2
Tant que b − a < 10^−3 faire
    m ← (a + b)/2
    si h(a) × h(m) > 0 alors
        a ← m
    sinon
        b ← m
    finSi
finTantQue
Afficher a, b
```

(c)

```
a ← −2
b ← 2
Tant que b − a > 10^−3 faire
    m ← (a + b)/2
    si h(a) × h(m) > 0 alors
        a ← m
    sinon
        b ← m
    finSi
finTantQue
Afficher a, b
```

(d)

```
a ← −2
b ← 2
Tant que b − a > 10^−3 faire
    m ← (a + b)/2
    si h(a) × h(m) > 0 alors
        b ← m
    sinon
        a ← m
    finSi
finTantQue
Afficher a, b
```

Exercice 3. *(4 points)*

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Exercice 4. *(6 points)*

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3,\ u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.
3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = u_n - 7.$$

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite constante.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.
2. (a) En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).