Mathématiques **Nom : ....** **TS 1, 2, 3, 4 et 5**

Lycée Jean Calvin - Noyon Mardi 11 décembre 2018

Baccalauréat blanc n°2

Les calculatrices sont autorisées. Le barème prend en compte la rédaction, la qualité de l'expression et la présentation de la copie. Le barème est donné à titre indicatif.

Le sujet est à rendre avec la copie.
Durée : 3h - pas de sortie anticipée

Exercice 1 :	/6
Exercice 2 :	/4
Exercice 3 :	/4
Exercice 4 :	/6
Total :	/20

Exercice 1. *(6 points)*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$.
   Or, $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
   Ainsi, on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

2. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut 2, donc g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ en restant positif, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.
   Donc, par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
   Donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f'(x) = 1 + \frac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 + \frac{(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = 1 + (1-x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x + 1 - x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x + \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.

3.

x	$-\infty$		$+\infty$
e^{-x}		$+$	
$g(x)$		$+$	
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a)
   - f est continue sur $[-1;0]$ car dérivable sur $\mathbb{R}$,
   - f est strictement croissante sur $[-1;0]$,
   - $f(-1) = -\mathrm{e}$ et $f(0) = 1$, donc, $0 \in [f(-1); f(0)]$

   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1;0]$.

   (b) $\alpha \in [-0,41; 0,40]$

   (c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5. (a) $f(0) = 0+1+\dfrac{0}{\mathrm{e}^0} = 1$ et $f'(0) = \mathrm{e}^{-0}g(0) = 2$, donc T a pour équation : $y = f'(0)(x-0)+f(0) = 2x+1$.

   (b) On étudie le signe de $f(x) - (2x+1) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - x = x(\mathrm{e}^{-x} - 1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
$f(x) - (2x+1)$		$-$	0	$-$	

   $\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow -x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$

   $\mathcal{C}$ est donc en dessous de sa tangente T au point d'abscisse 0.

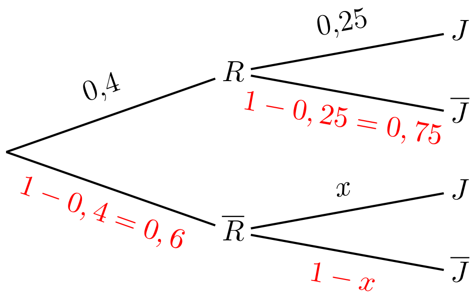
Exercice 2. *(4 points)*

1. Réponse (c).
2. Réponse (a).
3. Réponse (d).
4. Réponse (c).

Exercice 3. *(4 points)*

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J)=0,2$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(J)=P(R\cap J)+P\left(\overline{R}\cap J\right)=P(R)\times P_R(J)+P\left(\overline{R}\right)\times P_{\overline{R}}(J)=0,4\times 0,25+0,6\times x=0,1+0,6x$
   $\left.\begin{array}{rcl} P(J) & = & 0,2 \\ P(J) & = & 0,1+0,6x \end{array}\right\} \implies 0,2=0,1+0,6x \iff x=\dfrac{1}{6}$
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
   C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité $P_J(R)=\dfrac{P(R\cap J)}{P(J)}=\dfrac{0,1}{0,2}=\dfrac{1}{2}$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500 ; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p=0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1-p=0,8$.
   On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0,2$.
2. On cherche $P(X\geqslant 75)$ qui est égal à $1-P(X\leqslant 74)$.
   À la calculatrice on trouve $P(X\leqslant 74)\approx 0{,}001\,6$ ce qui donne $0,998$ pour la probabilité cherchée.

Exercice 4. *(6 points)*
Partie A :

1. La formule à saisir dans la cellule B4, puis à recopier vers le bas, permettant d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B est `= 5*B3/4 - B2/4`

2.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers le nombre 7.

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout n par : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ et $w_n = u_n - 7$.

1. (a) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = v_n$ donc la suite (v_n) est constante.

   (b) La suite (v_n) est constante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$.

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. (a)
   - **Initialisation**
     $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ donc $u_0 < u_1 < 15$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité**
     On suppose qu'il existe un rang $k \geqslant 0$, $u_k < u_{k+1} < 15$.
     Montrons alors que : $u_{k+1} < u_{k+2} < 15$
     Or, $u_k < u_{k+1} < 15 \implies \frac{1}{4}u_k < \frac{1}{4}u_{k+1} < \frac{15}{4} \implies \frac{1}{4}u_k + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{k+1} + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4}$.
     Donc, $u_{k+1} < u_{k+2} < \frac{36}{4} < 15$.
   - **Conclusion**
     On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$; on a démontré qu'elle était héréditaire pour $n \leqslant 0$.
     Donc, d'après le principe de récurrence, $u_n < u_{n+1} < 15$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) On a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est croissante.
   On a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 15$, donc la suite (u_n) est majorée.
   La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \leqslant 15$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - 7$ donc $u_n = w_n + 7$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}(w_n + 7) - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n$
   Donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

   (b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   Or $u_n = w_n + 7 = 7 + w_n$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

   (c) $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc, d'après les propriétés des limites des suites géométriques, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$.