Mathématiques **Nom : ....** **TS 1, 2, 3, 4 et 5**

Lycée Jean Calvin - Noyon Mardi 2 octobre 2018

Baccalauréat blanc n°1

Exercice 1. *(3 points)*

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \dfrac{4n^5 - 2n^3 + 5n}{3n^4 + n^3 + 10n + 2}$.
   Si $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{n^5(4 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^4})}{n^4(3 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^3} + \frac{2}{n^4})} = \dfrac{n(4 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^4})}{(3 + \frac{1}{n} + \frac{10}{n^3} + \frac{2}{n^4})}$
   or $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{5}{n^4} = 4$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
   Donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(4 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{5}{n^4}) = +\infty$
   Et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{10}{n^3} + \dfrac{2}{n^4} = 3$
   Donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
   L'affirmation A est fausse.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = (-1)^n + n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$
   d'où $-1 + n \leqslant v_n \leqslant 1 + n$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + n = +\infty$ et $v_n \geqslant -1 + n$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
   L'affirmation B est vraie.

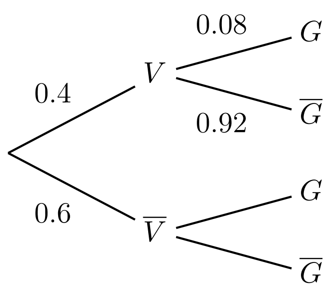
3. Soit une suite (w_n) telle que pour tout entier naturel n supérieur à 1,
   $$-1 - \frac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant 1 + \frac{1}{n},$$
   La suite (w_n) n'est pas forcément convergente. Trouvons un contre exemple : si $w_n = (-1)^n$ pour tout n alors $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc a fortiori $-1 - \dfrac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$
   Pourtant (w_n) n'est pas convergente.
   L'affirmation C est fausse.

Exercice 2. *(7 points) Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.*

Partie A

1. (a) Probabilité de l'événement G :
   D'après l'énoncé, la probabilité que la personne ait contracté la grippe est $P(G) = 0,2$.

   (b) Arbre pondéré :



2. <u>Probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée :</u>
   On a $P(G \cap V) = P(V) \times P_V(G) = 0.4 \times 0.08 = 0.032$
   Donc la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est 0.032.
3. <u>Probabilité que la personne ait contracté la grippe sachant qu'elle n'est pas vaccinée :</u>
   On a $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P(\overline{V} \cap G)}{P(\overline{V})}$
   Or, comme V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, $P(G) = P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G)$
   Ainsi $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P(G) - P(V \cap G)}{1 - P(V)} = \dfrac{0.2 - 0.032}{1 - 0.4} = 0.28$
   Donc la personne n'étant pas vaccinée, la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

1. <u>Loi de probabilité de X :</u>
   L'experience : « Interroger un habitant du village »a deux issues possibles :
   Le succès S : « La personne est vaccinée contre la grippe »de probabilité $p = 0,4$.
   et l'échec : « La personne n'est pas vaccinée contre la grippe ».
   On répète n fois cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante et X compte le nombre de succès.
   Donc X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,4$.
2. (a) <u>Probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées :</u>
   On a $n = 40$ et $p = 0,4$ veut $P(X = 15)$
   $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times (1 - 0,4)^{40-15} = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0.6^{25} \approx 0.123$
   Donc la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées est d'environ 0,123.
   (b) <u>Probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée :</u>
   $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19) \approx 0.130$
   La probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée est d'environ 0,130
   (c) <u>Nombre moyen de personnes vaccinées dans ce groupe :</u>
   $E(X) = n \times p = 40 \times 0.4 = 16$
   En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, le nombre moyen de personnes vaccinées parmi les 40 personnes interrogées est de 16.

Exercice 3. *(10 points)*
Partie A <u>Test de l'algorithme :</u>

p	2	2	2
k		1	2
u	5	$0,5 \times 5 + 0,5 \times (1-1) - 1,5 = 1$	$0,5 \times 1 + 0,5 \times (2-1) - 1,5 = -0,5$

Le nombre affiché en sortie est $-0,5$.

Partie B

1. <u>Modification de l'algorithme :</u>

```
Demander p
u ← 5
Pour k variant de 1 à p
    u ← 0,5u + 0,5(k − 1) − 1,5
    Afficher u
Finpour
```

2. Variations de la suite (u_n) à partir du tableau :
   Les premiers termes de la suite ne semblent pas être les termes d'une suite décroissante car $u_4 > u_3$ mais l'étude de quelques termes ne suffit pas à conclure, la suite est peut-être monotone à partir d'un certain rang.
3. (v_n) géométrique ?
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 = 0,1 \times (0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1(n+1) + 0,5$
   $v_{n+1} = 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n - 0,1 + 0,5 = 0,05u_n - 0,05n + 0,25 = 0,5 \times \left(\dfrac{0,05u_n}{0,5} - \dfrac{0,05n}{0,5} + \dfrac{0,25}{0,5}\right)$
   $v_{n+1} = 0,5 \times (0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n$
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de terme initial $v_0 = 0,1u_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.
4. v_n en fonction de n :
   (v_n) est géométrique donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 0,5^n = 0,5^n$
5. u_n en fonction de n :
   On a $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$ d'où $0,1u_n = v_n + 0,1n - 0,5$ et en divisant par $0,1$
   $u_n = 10v_n + n - 5$ soit $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.
6. Variations de (u_n) :
   On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
   $u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^{n+1} + (n+1) - 5 - (10 \times 0,5^n + n - 5)$
   $u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^n \times 0,5 + n + 1 - 5 - 10 \times 0,5^n - n + 5$
   $u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^n \times 0,5 + 1 - 10 \times 0,5^n$
   $u_{n+1} - u_n = 10 \times 0,5^n \times (0,5 - 1) + 1$
   $u_{n+1} - u_n = -5 \times 0,5^n + 1$
   La suite de terme général $-5 \times 0,5^n$ est une suite géométrique de terme initial $-5 < 0$ et de raison $0,5 \in]0;1[$.
   Elle est donc croissante et $-5 \times 0,5^3 = -0,625 > -1$. Donc pour tout $n \geqslant 3, -5 \times 0,5^n > -1$
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 3, u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.
7. Limite de la suite (u_n) :
   On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$.
   D'où par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times 0,5^n = 0$.
   De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 5 = +\infty$
   Donc par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.