Exercice 1 : *« 4 points »*

Comores Télécom propose un jeu qui consiste à tirer au hasard, successivement et sans remise deux téléphones dans un carton qui contient **deux** téléphones de marque **Samsung** et **cinq** de marque **ALCATEL.**
Soit A l'événement : « ***obtenir deux téléphones de marques différentes*** ».

(Les résultats seront donnés sous forme d'une fraction irréductible).

1. Calculer la probabilité de l'événement A.
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux téléphones associe le nombre de téléphones de marque **Samsung** obtenu.
   - **a.** Définir l'événement suivant : $(X = 2)$.
   - **b.** Calculer la probabilité de l'événement $(X = 2)$.
   - **c.** En déduire : $P[(X = 2) \cup A]$.
3. Maintenant, on suppose que le carton contient **n** téléphones dont deux de marque **Samsung** et les autres de marque **ALCATEL** où **n** est un naturel non nul.
   On tire au hasard successivement et sans remise deux téléphones. On note par P_n la probabilité de l'événement A.
   a) Montrer que : $P_n = \dfrac{4(n-2)}{n(n-1)}$ **b)** Retrouver le résultat de la question **1.** .

Exercice 2 : *« 4 points »*

Une région est attaquée par une épidémie. On a relevé les différents cas constatés durant les semaines. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous :

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre des cas identifiés : y_i	1	1	2	3	3	4

On définit ainsi une série statistique double.

1. Représenter les nuages des points de cette série, dans un repère orthonormé
2. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série. Placer le point G.
3. En utilisant la méthode de MAYER, montrer que, la droite de régression de y en x, notée (d), a pour équation $y = \frac{2}{3}x$. Tracer (d).
4. En supposant que cette tendance reste uniforme, déterminer le nombre des cas de cette épidémie à la douzième semaine.

Exercice 3 : *« 4 points »*

Partie A : ***Racine d'une équation du second degré à coefficient réel, dans l'ensemble des nombres complexes.***

On considère l'équation (E), à variable complexe : $z^2 - 2z + 5 = 0$.

1. Montrer que si un nombre complexe z_0 est une solution de l'équation (E), alors son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E).
2. Vérifier que le nombre complexe $\mathbf{1 - 2i}$ est une racine de l'équation (E).
3. En déduire la deuxième racine, notée z_1, de l'équation (E).

Partie B : ***Complexe et géométrie***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points E, B et P d'affixe respectives $\mathbf{3}$; $\mathbf{1-2i}$ et $\mathbf{1+2i}$.

1. Placer ces points dans le repère. (On complétera la figure au fur et à mesure).
2. **a)** Ecrire le nombre complexe $\dfrac{z_B - z_E}{z_P - z_E}$ sous forme algébrique.
   b) En déduire la nature du triangle BEP.
3. Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère BEPC soit un carré.
4. S, la similitude plane directe du plan qui transforme E en B et le point B en C.
   a) Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = -iz + 1 + i$.
   b) En déduire les éléments caractéristiques de S.
   c) Quelle est l'image, par la similitude S, du carré BEPC ?
5. Calculer, en cm^2, la surface du quadrilatère BEPC.

<u>Problème</u> : *« 8 points »*

La partie A est largement indépendante des deux dernières (B et C).

<u>Partie A</u> : ***Résolution d'une équation différentielle.***

On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $y'' + y' - 2y = 0$

1. Vérifier que les fonctions U et V définies sur IR par $U(x) = e^{-2x}$ et $V(x) = e^{x}$, sont des solutions de l'équation différentielle (E).
2. Montrer que, la fonction g définie sur IR par, $g(x) = a\,U(x) + b\,V(x)$, est solution de l'équation différentielle (E) où a et b sont des constantes réelles.
3. Déterminer alors, l'unique solution g, de l'équation différentielle (E) vérifiant :
   $g(0) = 1$ et $g'(0) = -2$.

<u>Partie B</u> : ***Etude d'une fonction***

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (1 + 2x)\,e^{-2x}$.

On note par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Dresser le tableau de variation de f
2. Tracer (C_f).
3. **a)** Montrer que la fonction $H(x) = (-x - 1)\,e^{-2x}$ est une primitive de f sur IR.
   b) Calculer alors la valeur exacte de la surface du domaine du plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

<u>Partie C</u> : ***Etude d'une suite.***

On considère les suites (V_n) et (S_n) définies par :

$V_n = \int_0^n f(x)dx$ et $S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$; pour tout entier n.

1. **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $V_n = 1 - (n + 1)\,e^{-2n}$
   b) Déterminer alors la limites de la suite (V_n).
2. **a)** Montrer que, pour tout entier naturel k, tel que $0 \leq k \leq n - 1$, on a :
   $$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$S_n - f(0) \leq V_n \leq S_n - f(n)$$
3. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$V_n + (1+2n)e^{-2n} \leq S_n \leq 1 + V_n$$
4. On admet que la suite (S_n) converge vers un réel L.
   Justifier que : $1 \leq L \leq 2$.